DEFINICIÓN

El límite de una función f en un punto x_0 examina el comportamiento de los valores de la función, $f(x)$, cuando los valores x se aproximan al punto x_0. Para tener una idea de la complejidad del problema pongamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$. Se quiere saber el comportamiento de la función cuando x se acerca a 1. Observe que la función no está definida en 1. Sin embargo podemos tomar valores arbitrariamente cercanos a 1. La siguiente tabla nos hace intuir el resultado del proceso límite.

x tendiendo a 1 por la izquierda $\rightarrow$ $\leftarrow$ x tendiendo a 1 por la derecha

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	2.710	2.970	2.997	2.9997	No está definida	3.0003	3.003	3.03	3.31

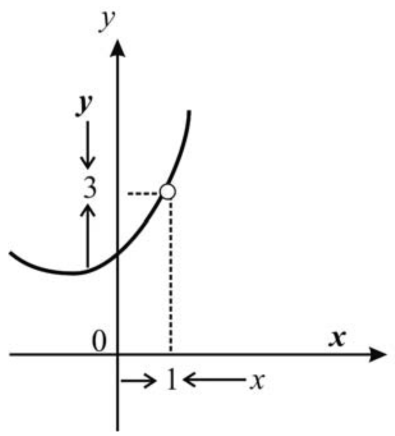
$f(x)$ tiende a 3

Vemos que los valores de la función se acercan a 3 conforme x se acerca a 1.

Esto se escribe como:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

La siguiente es una definición informal de límite de $f(x)$.



Definición intuitiva: Una función f tiene límite un número real *L* en *c* si $f(x)$ se acerca cada vez más al número *L* cuando *x* se aproxima más y más al número *c*, sin llegar a valer *c,* en cualquier sentido.

La notación usada es $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y se lee como:

el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c vale L.

En ocasiones se escribe $f(x) \to L$ cuando $x \to a$ y se suele leer como: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a c.

Comentario: Es importante que la función esté definida cerca de *c*. No hace falta que esté o no definida en *c*, pues el valor de la función en *c* no importa para decir cuanto vale el límite. Lo importante son los valores de la función evaluados en puntos cercanos a *c*. Observe como la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ no está definida en 1

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

En esta sección estableceremos las propiedades de los límites. Ellas permitirán calcular y establecer límites sin usar la definición formal. Las dos primeras propiedades resultan evidentes.

Suponga *k* una constante, entonces

1.- $\lim\limits_{x \to a} k = k$ **Propiedad de la función constante**

2.- $\lim\limits_{x \to a} x = a$. **Propiedad de la identidad**

El siguiente Teorema agrega más propiedades de los límites, estas propiedades permitirán calcular algunos límites a partir del límite de otras funciones.

Teorema 1.-Suponga $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen. Entonces:

3.-Si *k* es una constante tenemos que $\lim\limits_{x \to a} (kf(x)) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$. **Propiedad del factor constante**

4.- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$. **Propiedad de la suma**

5.- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$ **Propiedad de la diferencia**

6.- $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$. **Propiedad del producto.**

7.- $\lim\limits_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$. **Propiedad del cociente**

8.-Para *n* entero positivo tenemos $\lim\limits_{x \to a}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$ **Propiedad de la potencia**

9.- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, es válido siempre en el caso de *n* impar y si *n* es par podemos garantizarlo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$. **Propiedad de la raíz**

Comentarios:

1.- Las conclusiones del Teorema tienen dos partes, una implícita: la función que se le toma límite en el lado izquierdo de la igualdad tiene límite en *a* y otra explícita: se dice que este límite vale el lado derecho de la igualdad. Por ejemplo, si tenemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen entonces podemos asegurar que el límite de $(f + g)(x)$ cuando *x* va a *a* existe y vale el lado derecho de (4)

2.- Para aprenderse mejor estos resultados se suelen usar expresiones como: *los factores constantes salen fuera del límite* (propiedad 3); *el límite de una suma es la suma de los límites (ésta es la propiedad de la suma:* (propiedad 4); *el límite de un cociente es el cociente de los límites* si el límite del denominador es distinto de cero; *el límite se introduce dentro de la raíz*, en el caso que el índice de la raíz sea par podemos garantizar la propiedad si el límite del radicando es mayor que cero.

En los siguientes ejemplos se calculará límites usando estas propiedades precisando de igualdad en igualdad que propiedades de límites se están usando, es importante para ello interpretar la expresión algebraica a la que se está tomando límite: si es una suma o producto, etc.

Ejemplo 1.- Calcular los siguientes límites, justificando que propiedades se está usando.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^4)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 3}(x^3 - x^2 + 15)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x+15}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^4) \overset{\text{factor constante}}{=} 3\lim\limits_{x\to 2}x^4 \overset{\text{potencia}}{=} 3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^4 \overset{\text{identidad}}{=} 3(2)^4 = 48$.

b) La propiedad de la suma y diferencia puede ser aplicadas reiterativamente cuando hay más de dos términos, utilizando apropiadamente la propiedad asociativa. Directamente podemos ver la primera igualdad

$$\lim_{x\to 3}(x^3 - x^2 + 15) \underset{suma}{\overset{diferencia}{=}} \lim_{x\to 3}x^3 - \lim_{x\to 3}x^2 + \lim_{x\to 3}15$$

$$\underset{const.}{\overset{potencia}{=}} \left(\lim_{x\to 3}x\right)^3 - \left(\lim_{x\to 3}x\right)^2 + 15$$

Ahora aplicamos la propiedad de la identidad

$$= (3)^3 - 3^2 + 15 = 27 - 9 + 15 = 33$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x+15}} \overset{raiz}{=} \sqrt[4]{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+15}} \overset{cociente}{=}$

Se puede verificar que $\lim\limits_{x\to 1}(x+15)\neq 0$, entonces podemos aplicar la propiedad del cociente

$$= \sqrt[4]{\frac{\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+15)}} \underset{suma}{\overset{cte}{=}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}x + \lim\limits_{x\to 1}15}} \underset{const.}{\overset{identidad}{=}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{1+15}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{(x-2)^2} \overset{cociente}{=} \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)^2} \underset{potencia}{\overset{diferencia}{=}}$

Se puede verificar que $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)^2 \neq 0$, entonces podemos aplicar la propiedad del cociente

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}x - \lim\limits_{x\to 0}3}{(\lim\limits_{x\to 0}(x-2))^2} \underset{diferencia}{\overset{identidad,\ cte}{=}}$$

$$= \frac{0-3}{(\lim\limits_{x\to 0}x - \lim\limits_{x\to 0}2)^2} \underset{const.}{\overset{identidad}{=}}$$

$$= \frac{-3}{(0-2)^2} = -\frac{3}{4}$$

Comentarios:

1) Observe que en c) efectivamente se cumple la condición $\lim\limits_{x \Uparrow 1} \frac{1}{x / 15} - 0$. Esta condición nos permite aplicar la propiedad de la raíz del límite, cuando el índice es par. Si no fuese así entonces pudiese ocurrir que este límite no tuviese sentido por estar evaluando fuera del dominio de la función.

2) Como se podrá apreciar en todos estos ejemplos, el límite se hubiese podido obtener sustituyendo, sin embargo hay que ser muy cautos, no todos los límites los podremos obtener de esta forma. Debemos siempre basarnos en alguna propiedad para ir obteniendo los límites. El siguiente Teorema nos permitirá en el caso de funciones polinómicas hacer la sustitución.

10.-Propiedad del límite de una función polinómica:
Teorema 2. Sea $p(x)$ una función polinómica. Entonces

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$$

Demostración: Sea $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Entonces

$$\lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} \ldots c_1 x + c_0\right) \underset{suma}{=} \lim_{x\to a} c_n x^n + \lim_{x\to a} c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} c_1 x + \lim_{x\to a} c_0 \underset{constante}{\overset{factor\ \ cte}{=}}$$

$$= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1}\lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + c_1 \lim_{x\to a} x + c_0 \underset{identidad}{\overset{potencia}{=}} c_n\left(\lim_{x\to a} x\right)^n + c_{n-1}\left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$$

$$\underset{identidad}{=} c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0 = p(a).$$

De este Teorema y de la propiedad del límite del cociente deducimos rápidamente la siguiente propiedad

11.-Propiedad del límite de una función racional:
Corolario.- Sea $r(x)$ una función racional definida en a. Entonces

$$\lim_{x\to a} r(x) = r(a).$$

Observe como en el siguiente ejemplo el radicando es una función racional, en el cálculo del límite cuando quede expresado como el límite de una función racional aplicaremos esta propiedad sin necesidad de recurrir a la propiedad del cociente y luego de la suma.

Ejemplo 2.- Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(3x^2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}\right)$.

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}\right) \overset{suma}{=} \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2}\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

$$\underset{factor\ \ cte}{\overset{polinomio}{=}} 3\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

$$\overset{raiz}{=} 12 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x+3}{x^5-2x^2+3}}$$

La función racional está definida: el denominador no se anula

$$\overset{f.\ racional}{=} 12 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2^3-4\cdot 2+3}{2^5-2\cdot 2^2+3}}$$

$$= 12 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{27}} = 12 + \frac{\sqrt[3]{3}}{6}.$$

Pronto estudiaremos las funciones continuas en donde valdrá la sustitución para calcular el límite.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite justificando que propiedades se está usando

$$\lim_{x\to -1}\left((3x+1)^3 - \sqrt{\frac{2x^3-4x+3}{3x^2-x+1}}\right)$$

Respuesta: -9

CALCULO DE LÍMITES USANDO MANIPULACIONES ALGEBRAICAS.

En esta sección estudiaremos algunos límites donde las propiedades dadas anteriormente no podrán ser aplicadas directamente y habrá que reescribir $f(x)$ de una manera equivalente. El siguiente ejemplo nos aclarará muchas situaciones y conceptos

Ejemplo 1.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

Solución: Observe que el denominador se hace 0 cuando x tiende a 2**,** así que no se puede aplicar la propiedad del cociente. Sin embargo observará que cuando x se acerca a 2, el numerador se acerca a 1 y el denominador va siendo cada vez más pequeño y positivo, por consiguiente, el cociente se hace cada vez más grande (de manera ilimitada) conforme x se acerca a 2. Diremos entonces que el límite no existe y abusando de nuestra propia terminología diremos que vale $+\infty$. Estos conceptos próximamente los aclararemos.

Ejemplo 2.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

Solución: De nuevo el denominador es 0 en 2, pero en este caso el numerador también, quedando la forma indefinida $\dfrac{0}{0}$. Cuando ocurre este tipo de situación se debe manipular algebraicamente, en el caso de polinomio sobre polinomio se deberá factorizar y luego simplificar.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\ .$$

Al simplificar nos quedará la función $\dfrac{1}{x+2}$, la cuál es igual a la original salvo en x=2 donde la primera no está definida, pero en la definición de límite no se considera el valor 2, así que

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)}\overset{racional}{=}\frac{1}{(2+2)}=\frac{1}{4}.$$

> Un límite del tipo $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ diremos que tiene la forma indeterminada 0/0 si tanto f como g tienden a 0 cuando x tiende a c. Para calcular dicho límite hay que realizar manipulaciones algebraicas apropiadas, según el caso, que nos lleve a una simplificación, entre un factor del numerador y un factor del denominador que se anulan en c.

Observación.- Un límite con una forma indetermina 0/0 puede valer una constante, cero o no existir.

Veamos distintas situaciones triviales de límites de la forma $\dfrac{0}{0}$:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}\overset{simplificar}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{x}\overset{simplificar}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1}=k$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3}\overset{simplificar}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2} \overset{simplificar}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$. Este último límite no está definido, si x se acerca a 0 por la derecha va a más infinito, si se acerca a 0 por la izquierda va a menos infinito.

El siguiente es otro ejemplo con forma indeterminada $0/0$, donde el numerador y el denominador son polinomios. De nuevo la idea será factorizar y simplificar.

Ejemplo 3.- Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3-27}$

Solución.-

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^3-27} \underset{factorizar}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$\underset{simplificar}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)}{(x^2+3x+9)}$$

$$\underset{evaluar}{\overset{f.racional}{=}} \frac{3+1}{9+9+9} = \frac{4}{27}$$

En el próximo ejemplo tendremos otra vez la forma indeterminada $0/0$, pero en esta ocasión no será de la forma polinomio sobre polinomio, así que no podremos factorizar y simplificar de una vez.

Ejemplo 4.- Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución: De nuevo, al evaluar tenemos la forma $\frac{0}{0}$ pero esta vez aparece una raíz cuadrada en uno de los términos del numerador. El secreto de trabajar este tipo de límite con al menos uno de los dos miembros de la fracción con dos términos uno de los cuales lleva una raíz cuadrada en la variable es reescribir la expresión para $x \neq 1$. La forma de manipular es introducir la conjugada. Entonces tenemos para $x \neq 1$ que:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot 1 = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

Se reescribe 1 como la conjugada sobre la conjugada

$$= \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

Se realiza el producto $(a+b)(a-b)$ que nos ayudará a eliminar la raíz. El otro producto del otro miembro de la fracción no se ejecuta.

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

Se simplificó.

Así tenemos que $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$, salvo en x=1 donde la primera expresión no está definida, por tanto podemos sustituir cuando se está trabajando con límites $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1}(x+3)}+2} = \frac{1}{4}$$

Algunas recomendaciones para calcular límites $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ con forma indeterminada 0/0.

- Si tanto f como g son polinomios entonces factorice y simplifique.
- Si f o g es una expresión con dos términos donde al menos uno de los dos tiene radical entonces multiplique y divida por la conjugada de la expresión con radical, efectúe solo el producto notable, el otro producto no lo ejecute. Luego siga manipulando para cancelar un factor del numerador con uno del denominador.

Veamos otro ejemplo que intenta ilustrar la forma de trabajar. Algunos detalles de aplicación de propiedades son omitidos.

Ejemplo 5.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$

Solución: En este límite se tiene otra vez la indeterminación 0/0, donde en el numerador hay dos términos, ambos tienen radicales. Entonces se reescribe la función, multiplicando numerador y denominador por la conjugada

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\overset{\frac{0}{0}}{}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\cdot 1$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}\cdot\frac{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1}}$$ Se ejecuta solo el producto notable

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-\left(2\sqrt{x-1}\right)^2}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4(x-1)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2x+4}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

Se factoriza numerador y denominador en los factores que al evaluar dan 0. Posteriormente se simplifica.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}$$

Observe que se simplifica los factores que se anulan en 2

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{(x-1)(\sqrt{2x}+2\sqrt{x-1})}=\frac{-2}{1\cdot(\sqrt{2\cdot 2}+2)}=-\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 6.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x^3-8}}$

Solución: El límite tiene la forma indeterminada 0/0. Pero de ningún modo por el hecho de haber un radical podemos aplicar el consejo de la conjugada, primordialmente porque las expresiones del numerador y el denominador son de un término (no dos términos). En este caso podemos aprovechar que tenemos un cociente de raíces con igual índice así que lo reescribimos como la raíz de un cociente y aplicamos la propiedad del límite de la raíz.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{x^3-8}}=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^3-8}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}}$$

Luego de aplicar la propiedad del límite de la raíz tenemos que determinar el límite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8}$ el cual es del tipo polinomio/polinomio con forma indeterminada 0/0. Factorizamos y simplificamos.

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}}$ Se simplifica y desaparece la indeterminación

$= \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x^2+2x+4)}}$ Se evalúa pues la indeterminación despareció.

$= \sqrt[3]{\dfrac{1}{(2^2+2\cdot 2+4)}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{12}}$

Ejercicio de desarrollo.- Calcular los siguientes límites: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$ **;** **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$

FORMAS INDETERMINADAS: 1^{∞}

La forma $0/0$ no es la única forma indeterminada. Tenemos también la forma 1^{∞} .

Diremos que un límite del tipo $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^{g(x)}$ tiene la forma indeterminada 1^{∞} si $f(x)\to 1$ y $g(x)\to\infty$ cuando $x\to c$

El límite: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ tiene esta forma indeterminada. Este límite y similares en formas a éste aparece con frecuencia en aplicaciones.

Un cálculo más avanzado permite demostrar que este límite es el número *e*, recordemos que es un número irracional cuyos primeros dígitos son 2,71828 y es la base de los logaritmos naturales.

Los valores numéricos de la tabla fueron obtenidos a través de una calculadora, Vemos a través de la tabla que este límite parece acercarse cada vez más al número *e* cuando *x* se acerca a 0.

En ocasiones se asume que este límite vale el número *e* para calcular a través de él otros límites con formas semejantes, por medio de manipulaciones y sustituciones apropiadas.

x	x	$(1+x)^{1/x}$		$f(x)$
	-10^{-1}	$(0.9)^{-10}$	=2.8679	
⇒	-10^{-2}	$(0.99)^{-100}$	=2.7279	⇒
	-10^{-3}	$(0.999)^{-1000}$	=2.7196	
	-10^{-4}	$(0.9999)^{-10000}$	=2.7184	
0	0			e?
	10^{-4}	$(1.0001)^{10000}$	=2.7181	
⇐	10^{-3}	$(1.001)^{1000}$	=2.7169	⇐
	10^{-2}	$(1.01)^{100}$	=2.7048	

En ocasiones se asume que este límite vale el número *e* para calcular a través de él otros límites con formas semejantes, por medio de manipulaciones y sustituciones apropiadas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.- Asuma que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Calcular **a)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-2/x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{(1-3x)^{1/x}}$

Solución: La idea es llevar este límite a la forma $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ usando las propiedades de límites y algebraicas.

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-2/x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{1/x}\right]^{-2}$

$$\overset{p.potencia}{=} \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]^{-2} = [e]^{-2} = e^{-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{(1-3x)^{1/x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$

El numerador y denominador del exponente se multiplica por -3 a fin de preparar un cambio de variable

$$= \lim_{x\to 0}(1+(-3x))^{\frac{-3}{2(-3x)}}$$

Se hace la sustitución $y=-3x$, esto es, sustituimos la expresión (-3x) por y, tomando además en consideración que si $x\to 0$, entonces $-3x\to 0$ y por consiguiente $y\to 0$.

$$= \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{-3}{2y}}\right)$$

Observe que el límite tiene que estar completamente en términos de la nueva variable y.

$$= \lim_{y\to 0}\left((1+y)^{\frac{1}{y}\left(\frac{-3}{2}\right)}\right)$$

Se reescribe a fin de usar la propiedad de la potencia de límites

$$= \lim_{y\to 0}\left(\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-3/2}\right)$$

$$\overset{p.potencia}{=} \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^{-3/2} = [e]^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$

Ejercicio de desarrollo: Asuma que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}4(1-5x)^{\frac{3}{2x}}$

PLANTEAMIENTOS DE LÍMITES EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL

El siguiente es un límite que se plantea en el cálculo diferencial:

Ejemplo 8.- Encontrar $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, donde $f(x)=x^2+2$.

Solución:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2-x^2-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

Observación: en este caso la variable sobre la que se está tomando límite es h, x se comporta como constante.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ donde $f(x)=\sqrt{1-x}+2$

EJERCICIOS

1) Hallar los siguientes límites, justifique de igualdad en igualdad las propiedades que está usando.

1.1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\sqrt{(1-2x)^3}$; **1.2)** $\lim\limits_{x\to 0}3x-\sqrt{x^2+1}$; **1.3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x+1}{x^5-2x^2-5x+1}$; **1.4)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-\sqrt{x+3}}$

2) Encuentre los siguientes límites.

2.1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$; **2.2)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2}$; **2.3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x+1}{2x^2-3x+4}$

2.4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^2-x}$; **2.5)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$; **2.6)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2x}$

2.7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-2x+1}$; **2.8)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x^2-2x}$; **2.9)** $\lim\limits_{x\to 0}2(1+3x)^{2/x}$

2.10) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x-x^2}{x})^{1/x}$; **2.11)** $\lim\limits_{x\to 0}2(1+3x)^{\frac{3x+4}{x}}$; **2.12)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{1/x^2}$

2.13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-x}$; **2.14)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-(x+2)}{x}$; **2.15)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4(1-2x)^{-1/x}}$

2.16) $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{16-t^2}{2\sqrt{t}-4}$; **2.17)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^4-16}$; **2.18)** $\lim\limits_{t\to 1}\sqrt[3]{\dfrac{t^3-1}{t^2-3t+2}}$;

2.19) $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{\sqrt{h}-1}$; **2.20)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-2}\right)^5$

3) Encontrar $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada una de las siguientes funciones:

3.1) $f(x)=x^2-2x$; **3.2)** $f(x)=x^2-2$; **3.3)** $f(x)=3-5x$;

3.4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$; **3.5)** $f(x)=\sqrt{x+1}$; **3.6)** $f(x)=2\sqrt{x}$

4) Calcular: **4.1)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; **4.2)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x}}$; **4.3)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{x+1}-1}$

Respuestas: **1.1)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; **1.2)** -1; **1.3)** 1; **1.4)** -1; **2.1)** $-\dfrac{1}{4}$; **2.2)** 3/4-1; **2.3)** $\dfrac{1}{4}$; **2.4)**-1; **2.5)** $\dfrac{1}{2}$; **2.6)** $-\dfrac{8}{7}$; **2.7)** 0; **2.8)** $-\dfrac{1}{2}$; **2.9)**$2e^6$; **2.10)** e^{-1}; **2.11)**$2e^{12}$; **2.12)** e^2; **2.13)** 6; **2.14)** -1; **2.15)** 2e; **2.16)** -16; **2.17)** $-\dfrac{3}{8}$; **2.18)** -3; **2.19)** 0 ;**2.20)** 243; **3.1)** $2x$-2 **3.2)**$2x$ **3.3)**-5; **3.4)** $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ **3.5)** $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; **3.6)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

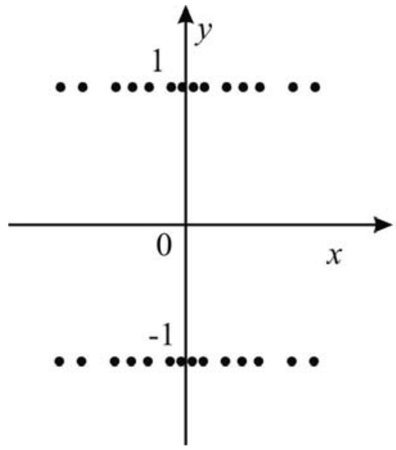
LIMITES QUE NO EXISTEN

En ocasiones el límite no existe ya que el valor de la función $f(x)$ no se aproxima a un único valor cuando x tiende a un x_0. Pretendemos mostrar en los siguientes ejemplos distintas formas en que un límite puede no existir. La primera que mostramos es una función muy irregular cerca de 0,

Ejemplo 1.- Determine $\lim_{x \to 0} f(x)$, donde *f* está definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x = \dfrac{1}{2n} \\ -1 & si \quad x = \dfrac{1}{2n-1} \\ 0 & si \ no \end{cases}$$

Con *n* número natural.



En el lado derecho mostramos la gráfica de la función *f* y abajo una tabla de distintos valores de la función para *x* cada vez más próximos a 0, escogidos estratégicamente para exhibir el comportamiento oscilatorio de la función alrededor de 0. Esto es, la gráfica va de −1 a 1, pasando por cero, un número infinito de veces, en una vecindad de 0. Resulta imposible que *f*(*x*) este cerca de un solo número L, de aquí podemos decir que el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

$$\frac{\frac{1}{101}+\frac{1}{102}}{2} = \frac{203}{2(101)(102)}$$
punto medio entre 1/101 y 1/102

x	1/2	1/3	7/24	1/4	1/5	11/60	1/6	1/7	…	1/100	1/101		⇑	0
f(*x*)	1	-1	0	1	-1	0	1	-1		1	-1	0	⇑3	

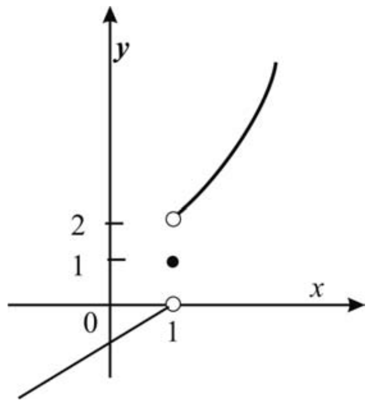
Se hace referencia a este tipo de situación diciendo que la **función oscila infinitamente cerca de x_0.**

Ejemplo 2.- Determine $\lim_{x \to 1} f(x)$, donde *f* esta definido por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:

Observe que para valores de x muy cercanos a 1, pero menores que 1, los valores de la función f son muy cercanos a 0. Por el otro lado, si los valores de x están cerca de 1, pero mayores que 1, entonces los valores de la función allí son cercanos a 2. Como usted podrá ver no hay un solo número tal que los valores de la función se acerquen cuando x se aproxima a 1. De aquí concluimos que $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.



Cuando la gráfica de la función da un salto en un punto, el límite puede no existir. Específicamente **no existe el límite de *f*(*x*) en la situación que la función tiende a un número L_1 cuando *x* se acerca a x_0 por la izquierda distinto a cuando *x* se acerca x_0 por la derecha.**

Ejemplo 3.- Determine $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ **.**

Solución: En la sección pasada vimos que el valor de la función tiende a $+\infty$. Ahora bien $+\infty$ no es un número es una expresión para decir que los valores de la **función aumentan sin límite, cuando *x* se acerca a** x_0 **.** Esta es otra situación en que un límite puede no existir.

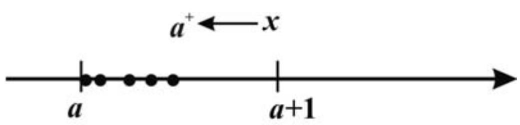
LIMITES LATERALES

En el ejemplo 2 de la sección pasada teníamos que la función

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x=1 \\ x^2+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Habíamos establecido que el límite de esta función no existe en 1, sin embargo si nos acercamos a 1 por la derecha los valores de la función tiende a 2 y si nos acercamos por la izquierda los valores de la función tiende a 0. Este hecho lo podemos expresar a través de los límites laterales.

Si x tiende a a por la derecha escribimos $x\to a^+$



Definición (intuitiva).- Si $f(x)$ se acerca a un número específico L, cuando x se aproxima a a por la derecha decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es L y escribimos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L\ .$$

De manera análoga podemos definir $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Observación.- Las propiedades de los límites bilaterales se siguen cumpliendo en el caso de los límites laterales. Esto es, el límite de una suma es la suma de los límites cuando estos límites existen, el límite de un producto, el límite de una raíz, etc. siguen las mismas reglas.

Podemos demostrar la existencia de determinados límites a través del siguiente Teorema.

Teorema.- Sean a y L dos números reales y f una función real definida en un intervalo abierto conteniendo a a. Tenemos entonces que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

Este Teorema tiene dos formas de usarlo:

1.- Si los dos límites laterales son distintos, entonces concluimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe.

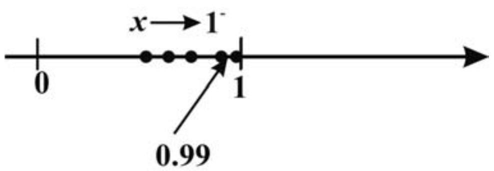
2.- En el caso que los dos límites laterales existan y sean iguales entonces concluimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y vale L.

Ejemplo 1.- Calcular **a)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y **b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si \quad x<1 \\ 3 & si \quad x=1 \\ 3x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:

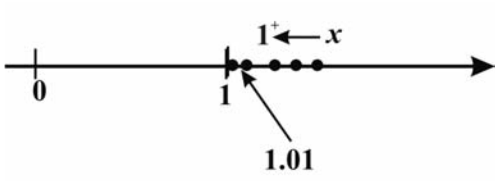
a) Como la función está definida con una fórmula antes de 1 y otra después de 1, hay que usar límites laterales y luego ver si son iguales o no para concluir la existencia del límite que nos interesa.



Observe que si $x\to 1^-$, estos x son menores que 1, así que $f(x)=x^2+1$ allí.

Por tanto

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=1^2+1=2$.



De manera análoga, si $x\to 1^+$, estos x son mayores que 1, así que $f(x)=3x-1$ allí.

Así

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=3.1-1=2$.

Como los dos límites laterales son iguales a 2, concluimos que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

b) Para calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tomamos en cuenta que a medida que estamos más cerca de 2, los x son mayores que 1, por tanto $f(x)=3x-1$.

Así

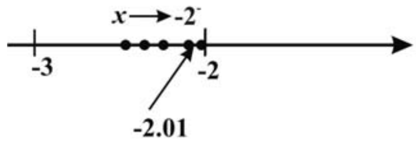
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 3x-1=5$.

Observación.- En la parte a establecimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe y vale 2. Observe que no se toma en cuenta en el calculo de este límite el valor de la función en x=1, en este caso $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$,

Ejemplo 2.- Calcular $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, donde $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x+2}, & si \quad x<-2 \\ x-1 & si \quad x>-2 \end{cases}$

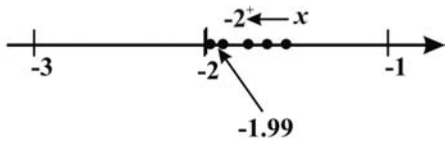
Solución:
Como la función está definida con una fórmula antes de -2 y otra después de -2, hay que usar límites laterales y luego ver si son iguales o no para concluir la existencia del límite que nos interesa.

Observe que si $x\to -2^-$, estos x son menores que -2, así que $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x+2}$ allí. Por tanto



$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{4-x^2}{x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2-x)=4.$$

De manera análoga, si $x\to -2^+$, estos x son mayores que -2, así que $f(x)=x-1$ allí. De aquí



$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(x-1)=-2-1=-3.$$

Como los dos límites laterales son distintos concluimos que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe.

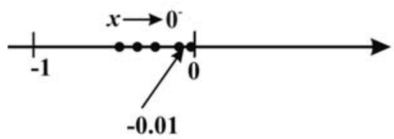
Ejemplo 3.- Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

Solución: Sabemos que al evaluar el valor absoluto tenemos que tomar en cuenta el signo de la variable x. Si x está cerca de 0, entonces tomaremos límites laterales

Si $x\to 0^-$, estos x son menores que 0, por consiguiente los x´s son negativos y de aquí $|x|=-x$

|-0.01|=0.01

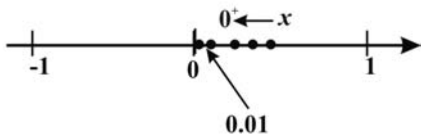
Por consiguiente:



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

Si $x\to 0^+$, estos x son mayores que 0, por consiguiente los x´s son positivos y de aquí $|x|=x$

Así obtenemos:



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1)=1.$$

Como los límites laterales son distintos concluimos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} \text{ no existe.}$$

Ejercicio de desarrollo- Calcular $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ donde

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+12}, & si \quad x<2 \\ 3 & si \quad x=2 \\ x^2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Respuesta: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=9$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si existe y vale 4.

Ejemplo 3.- Consiga el valor de *k* para el cual $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe, donde $f(x)=\begin{cases} kx+2, & si \quad x<3 \\ x^2-1 & si \quad x>3 \end{cases}$

Solución: La función está definida por partes y justo en 3 cambia la fórmula para evaluar la función. Para que el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ exista los límites laterales deben ser iguales. Así que el procedimiento es calcular el límite lateral por la izquierda, que dependerá de *k*, y el límite por la derecha, luego plantear la ecuación que los dos límites laterales son iguales, resolviendo la ecuación se obtendrá el valor de *k.*
El límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} kx+2=k\cdot 3+2$$

El límite por la derecha

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} x^2-1=9-1=8$$

Se plantear la ecuación

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$
$$3k+2=8$$

La solución de esta ecuación es $k=2$, así que para este valor de *k,* los límites laterales son iguales y por consiguiente el límite $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe si y sólo si $k=2$.

Observación.- De nuevo insistimos que la existencia de un límite en un punto no depende si la función está definida o no en ese punto o si el valor de la función en ese punto es igual o no al límite.

Comentario.- Los límites laterales no sólo se introducen para el caso en que la función sea sospechosa de dar un salto. También son necesarios en el caso que la función tenga un dominio restringido.

Por ejemplo, el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ es el conjunto $[-1,+\infty)$. Si queremos saber que sucede con los valores de la función cuando *x* se aproxima a –1, solo tiene sentido plantear el límite cuando x tiende a –1 por la derecha, pues allí es donde está definida la función. No tiene sentido plantear en este caso $\lim_{x\to -1}\sqrt{x+1}$ ni $\lim_{x\to -1^-}\sqrt{x+1}$.

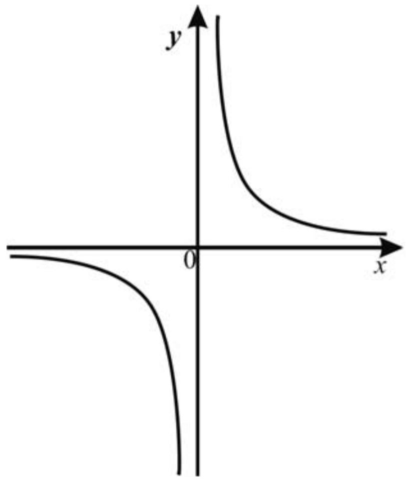
Ejercicio de desarrollo. Consiga el valor de *k* para el cual $\lim_{x\to -1} f(x)$ existe, donde

$f(x)=\begin{cases} 3x-2, & si \quad x<-1 \\ 1 & si \quad x=-1 \\ xk+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$ (**Respuesta**: *k*=8)

LIMITES INFINITOS

Ya habíamos visto que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ no existía, pues los valores de la función se hacen arbitrariamente grandes cuando x se acerca a 0. Esto se escribe como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$.

Veamos los límites de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ en 0**,** cuya gráfica es conocida.



Observe de la gráfica que si x se acerca a 0 por la derecha, la función toma valores arbitrariamente grandes, esto es $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

Por el otro lado, la función (la y) toma valores negativos, pero arbitrariamente grandes en magnitud conforme x se aproxima a 0 por la izquierda, esto lo expresamos diciendo que la función va a $-\infty$. En nuestra notación, esto es: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Ejemplo 1.- Determinar $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{2x-x^2}$ **.**

Solución: El denominador tiende a 0 cuando x se acerca a 2, pero el signo es distinto dependiendo por que lado vaya x a 2. Así tomamos límites laterales

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2-x}\overset{\frac{1}{0^-}}{=}-\infty\ .$$

Si $x\to 2^+$, entonces los $x\acute{}s$ son mayores que 2, por lo tanto $2-x\to 0^-$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{2x-x^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$$

De aquí concluimos que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{2x-x^2}$ no existe.

Hay que remarcar que siempre que se pueda, se simplifica la expresión, en este caso resultó más fácil el análisis una vez simplificada la expresión. Pero no siempre se puede. Las expresiones factorizadas también ayudan en el análisis del signo del límite.

Ejemplo 2.- Determinar $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-4x+3}$.

Solución: Conviene factorizar, para realizar mejor un estudio de signos

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}\overset{\frac{2}{0^-\cdot(-2)}}{=}+\infty$$

Si $x\to 1^-$, entonces $x+1\to 2$, $x-1\to 0^-$ y $x-3\to -2$.

Observe que el denominador es el producto de dos números negativos, por tanto el denominador es positivo y se acerca a 0.

Ejercicio de desarrollo.- Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{t\to -2^+}\frac{t^3-4}{4-t^2}$. (Respuesta: $-\infty$)

FORMA INDETERMINADA $\infty-\infty$

Un límite del tipo $\lim\limits_{x\to c}(f(x)-g(x))$ se dice que tiene forma indeterminada $\infty-\infty$ **si** tanto f como g van a ∞ cuando x tiende a c. (La definición vale si se toman límites laterales). Intuitivamente podemos ver que un límite de esta naturaleza puede dar cualquier cosa, por ejemplo si f va más rápidamente a infinito que g puede esperarse que el resultado sea más infinito, si van a infinito con la misma velocidad puede esperarse que de una constante. Una manera para resolver este tipo de límite es manipular la expresión, reescribiéndola como un cociente y seguir trabajando este límite aplicando las recomendaciones del caso.

Ejemplo 3.- Determinar: **a)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty-\infty=-\infty$ Observe que aquí no había indeterminación. Debe estar claro que $-\infty-\infty=-\infty$

b) Para calcular este límite debemos calcular el otro límite lateral. El límite lateral por la derecha si queda de la forma indeterminada $\infty-\infty$. Para convertirlo en un cociente sumamos fracciones:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)^{\infty-\infty}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(x-1)^2}=-\infty$$

En conclusión como los dos límites laterales van a $-\infty$, tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty$$

Ejemplo 4.- Determinar **a)** $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right)$

Solución:

a) Al tomar límites a los dos términos queda la forma $+\infty-\infty$, es claro que el límite a) es una forma indeterminada. Sumamos fracciones, en este caso resulta más rápido por m.c.m. de los denominadores

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}\right)^{+\infty-\infty}=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2-1}{x(x+1)}\right)^{0/0}=$$ Como quedó 0/0 factorizamos y simplificamos

$$=\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-1}{x}=2.$$

b) Para calcular el límite bilateral tenemos que calcular el límite por la derecha. El lector se puede dar cuenta que los pasos para calcular el límite por la derecha son los mismo que en la parte a) y da

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}\right)=2$$

Por tanto como los dos límites laterales son iguales podemos concluir que:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x(x+1)}\right)=2$$

Ejercicio de desarrollo.- Calcular **a)** $\lim\limits_{t\to -2^+}\left(\dfrac{t}{4-t^2}-\dfrac{1}{2+t}\right)$; **b)** $\lim\limits_{t\to -2^-}\left(\dfrac{t}{4-t^2}-\dfrac{1}{2+t}\right)$ (a) $-\infty$, b) ∞)

APLICACIONES

Ejemplo 1.- El costo de eliminar el p por ciento de contaminación en un lago está dado por $C(p)=\dfrac{1500p}{100-p}$. **a)** ¿Cuál es el costo de eliminar el 50% de la contaminación del lago? **b)** Encuentre $\lim\limits_{p\to 100^-} C(p)$ **c)** ¿Se puede eliminar el 100% de la contaminación?

Solución:

a) Se tiene que evaluar $C(p)$ en $p=50$. Esto da

$$C(50)=\frac{1500\cdot 50}{100-50}=1500\,\text{UM}$$

b) Observe que en $\lim\limits_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}$ el denominador se acerca a 0 con signo positivo y el numerador a 150000, así pues $\lim\limits_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}=\infty$.

c) El costo aumenta ilimitadamente cuando el porcentaje de contaminación que se quiere eliminar se acerca al 100%, así que es imposible eliminar toda la contaminación.

EJERCICIOS

1) Calcule los siguientes límites. Si alguno no existe, justifique

1.1) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{x-3}$; **1.2)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-x}{2-x}$; **1.3)** $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x}{x^2+4x+4}$;

1.4) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}$; **1.5)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3}$; **1.6)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{2-x}$;

1.7) $\lim\limits_{x\to -1^+}(1+x)^{-1}$; **1.8)** $\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$; **1.9)** $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{2-x}$;

1.10) $\lim\limits_{y\to 1^-}\dfrac{2y}{(1-y)\sqrt{1-y}}$; **1.11)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$; **1.12)** $\lim\limits_{x\to -1^+} x\sqrt{1+x}$

1.13) $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}$; **1.14)** $\lim\limits_{x\to -1^-}1-\dfrac{2}{x^2-1}$; **1.15)** $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

1.16) $\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y^2+2y^4}{2y^3+5y^4}$; **1.17)** $\lim\limits_{x\to -1^+} x\sqrt{1+x}$; **1.18)** $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{x-1}{x^2-4x}\right)$

1.19) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2-\dfrac{1}{x^2-4x+3}\right)$; **1.20)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; **1.21)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

1.22) $\lim\limits_{y\to 0^-}\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{y+1}{y^3}\right)$; **1.23)** $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{5-x}$; **1.24)** $\lim\limits_{x\to 5^-}\sqrt{\dfrac{25-x^2}{5x-x^2}}$

2) Para las siguientes funciones encontrar los límites indicados. Si alguno no existe, justifique.

2.1) $f(x)=\begin{cases} -x^3+1, & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ 3x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; **e)** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

2.2) $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x^2-1}, & si \quad x\le -2 \\ x^2-1 & si \quad x>-2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x)$; **d)** $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$

2.3) $f(x)=\begin{cases} e^{3/4} & si \quad x\le 0 \\ (1-3x)^{-4x} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$**;**
c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$**; d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2.4) $f(x)=\begin{cases} -1, & si \quad x<0 \\ 1 & si \quad x=0 \\ x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **;**
c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$**; d)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**; e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

2.5) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2+2x-8} & x>2 \\ \dfrac{x^2+2}{6} & x\le 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$**; b)** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$**.**

2.6) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2-4x+3}, & si \quad x<1 \\ x, & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$

2.7) $h(x)=\begin{cases} x+3x^2 & x<2 \\ \dfrac{x^4-16}{4-\sqrt{8x}} & x>2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$**; c)** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

2.8) $H(x)=\begin{cases} (1+\dfrac{x}{3})^{1/x} & x<0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{e}}{1+x} & x\ge 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} H(x)$

3) Consiga el valor de *k* para el cual el límite de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe, donde $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & si \quad x<1 \\ x-k & si \quad x>1 \end{cases}$

4) Consiga el valor de *k* para el cual el límite indicado exista

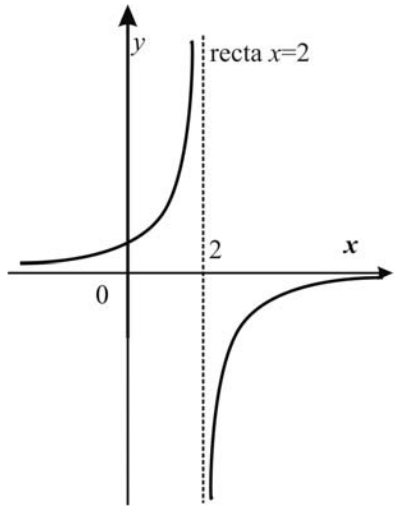
4.1) $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & si \quad x<-1 \\ 1 & si \quad x=-1 \\ xk & si \quad x>-1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; **4.2)** $f(x)=\begin{cases} kx-1, & si \quad x<2 \\ x^3\sqrt{k}-9 & si \quad x>2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Respuestas: 1.1) $-\infty$ **1.2)** ∞ **; 1.3)** $-\infty$; **1.4)** 0 **; 1.5)** $\sqrt{3}$; **1.6)**No existe; **1.7)** ∞ **; 1.8)** ∞ ; **1.9) 0; 1.10)** ∞ ;**1.11)** ∞ **; 1.12)**0; **1.13)**0; **1.14)** ∞ 0; **1.15)**-1/3 **1.16)** $-\infty$ **1.17)** 0; **1.18)** ∞ **1.19)** $-\infty$ **1.20) 3/2; 1.21)** $-\infty$ **; 1.22)** ∞ **;1.23)** $+\infty$ **;1.24)** $\sqrt{2}$ **; 2.1 a)** 2; **b)**-1; **c)**1; **d)**no existe **e)** ∞ **2.2) a)**-1; **b)**3; **c)** -$\sqrt{3}$ **d)**no existe; **2.3) a)** $\dfrac{1}{16}$**; b)** $e^{4/3}$**; c)** $e^{3/4}$**;** No existe;
2.4) a)1 **b)**-1; **c)**-1; **d)**-1; **e)**-1; **2.5) a)**1/2; **b)**no existe; **2.6) a)**no existe**; b)**1**;**
2.7) a) -32 **b) -32; c)**no existe**. 2.8)** $\sqrt[3]{e}$ **3) 1; 4.1)** 1; **4.2)** 4

ASINTOTAS VERTICALES

Intuitivamente **una asíntota** de una función **es una recta** tal que la gráfica de la función se acerca cada vez más a ella en cierto sentido. Si hablamos de asíntota vertical nos referimos a una recta vertical.

En la figura se puede apreciar como la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ crece o decrece sin límite cuando x se acerca a 2. La gráfica de la función se acerca cada vez más a la recta x=2 La recta x=2 la llamaremos una asíntota vertical de la gráfica de *f*.



Este tipo de comportamiento es descrito por los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 2^{+}}\frac{1}{2-x}=-\infty\ .$$

$$\lim_{x\to 2^{-}}\frac{1}{2-x}=+\infty\ .$$

Esto dice que cuando x se acerca a 2 por la izquierda, los valores de la función (las y) toman valores positivos y arbitrariamente grandes, como efectivamente ocurre en la gráfica. Así que hay una correspondencia entre asíntotas verticales y límites laterales.

Definición.- La recta $x=a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$ si se cumple cualquiera de las siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$**;** **b)** $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=+\infty$**;** **c)** $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$ **ó** **d)** $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty$**.**

Para buscar las asíntotas verticales de la gráfica de una función, debemos conocer algo acerca de los valores que toma la función. En el caso que la función tenga algún término fraccionario deberíamos buscar asíntotas $x=k$, para aquellos valores k donde el denominador se hace 0.

Ejemplo 1.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)(x+3)}.$$

Bosquejar la gráfica de la función en la zona donde se aproxima a la asíntota.

Solución:

Los candidatos a para que $x=a$ sea una asíntota vertical son los x donde se anula el denominador de la función; planteamos entonces la ecuación

$$(x-1)(x+3)=0$$

cuyas soluciones son 1 y –3.

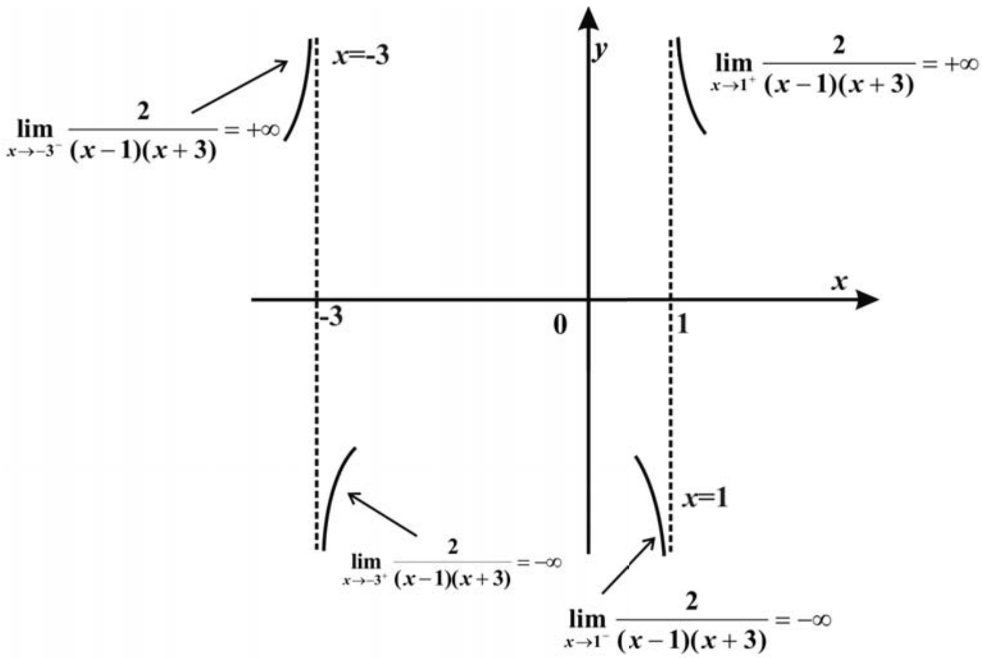
A fin de llevar a cabo la graficación requerida, planteamos todos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^-\cdot 4}}{=}-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{0^+\cdot 4}}{=}+\infty$$

De aquí concluimos que x=1 es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{-4\cdot 0^-}}{=}+\infty \qquad \lim_{x\to -3^+}\frac{2}{(x-1)(x+3)}\overset{\frac{2}{-4\cdot 0^+}}{=}-\infty$$

Tenemos entonces que x=-3 también es una asíntota vertical. Esta información de los límites laterales es exhibida en la siguiente figura donde la gráfica está incompleta sólo se ha bosquejado en las zonas cercanas a las asíntotas.



Comentario: Una función puede no tener o tener un número finito o infinito de asíntotas verticales.

Ejemplo 2.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)}$.

Solución: Observe que el denominador se hace 0 en x=1. Así planteamos

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)}\underset{simplificar}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$$\overset{simplificar}{=}\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$$

Igual valor nos da el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda. Concluimos que esta función no tiene asíntotas verticales.

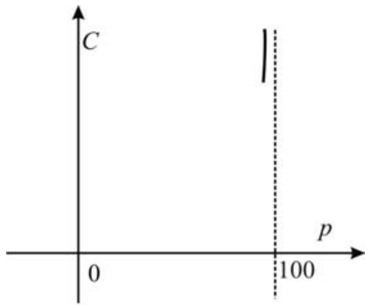
Recuerde que en una función fraccionaria, los x´s donde el denominador se hace 0 son sólo candidatos a asíntota vertical.

Ejercicio de desarrollo.- Encontrar las asíntotas verticales de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x^3-x)}$

(Respuesta: $x=0$ x=0 y $x=-1$ son asíntotas vertícales)

APLICACIÓN

Ejemplo 1.- El costo de eliminar el p por ciento de contaminación en un lago está dado por $C(p)=\dfrac{1500p}{100-p}$. **a)** Determine la asíntota vertical de la gráfica de $C(p)$ **b)** Dibuje el comportamiento de la función costo cerca de la asíntota



Solución

a) Como $\lim\limits_{p\to 100^-}\dfrac{1500p}{100-p}=\infty$, entonces $p=100$ es una asíntota vertical de la grafica de $C(p)$

b) Al lado se muestra la grafica de $C(p)$ en una vecindad de p=100

EJERCICIOS

1) Determinar todas las asíntotas verticales de las funciones dadas. Dibuje la gráfica cerca de las asíntotas. (Puede hacer un pequeño trazo vertical para representar la gráfica de la función, no tiene porque darle la curvatura)

1.1) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$; **1.2)** $g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; **1.3)** $f(x)=\dfrac{x}{x^3+2x^2-x-2}$

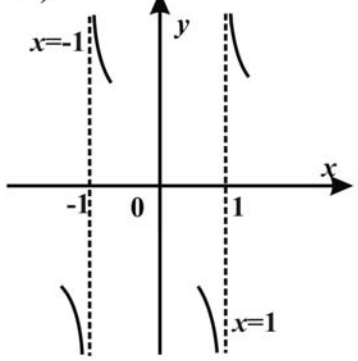
1.4) $f(x)=(2-x)^{-2}$; **1.5)** $h(x)=\dfrac{x^3-2}{x^3+8}$; **1.6)** $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-4x}$

1.7) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{4-x^2}$; **1.8)** $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{x+1}$; **1.9)** $g(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{x+1}$;

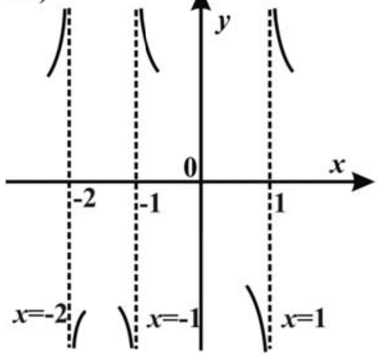
1.10) $f(x)=\sqrt{1-x}+\dfrac{3}{x-1}$; **1.11)** $f(x)=\dfrac{4-x}{2x-x^2}$

Respuestas: 1.1) No tiene; **1.2)** $x=-1;\ x=1$; **1.3)** $x=-1;\ x=1;\ x=-2$; **1.4)** $x=2$; **1.5)** $x=-2$; **1.6)** $x=-2;\ x=2$; **1.8)** No tiene ; **1.9)** $x=-1$; **1.10)** $x=1$**; 1.11)** $x=2;\ x=0$

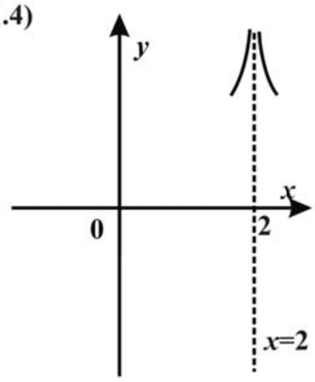
1.2)



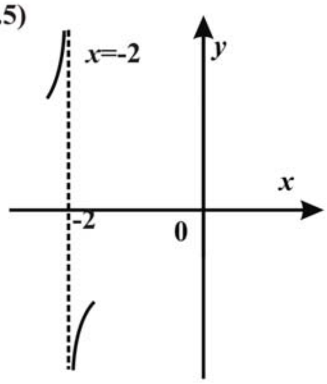
1.3)



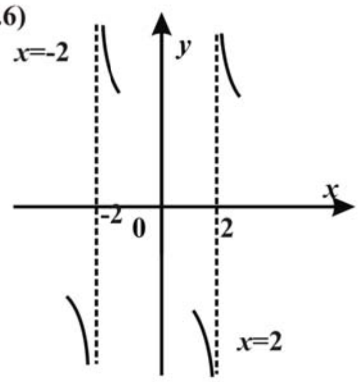
1.4)



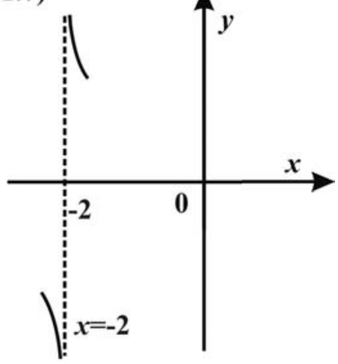
1.5)



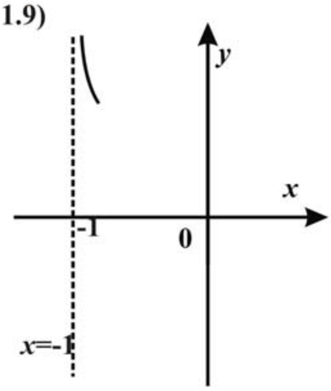
1.6)



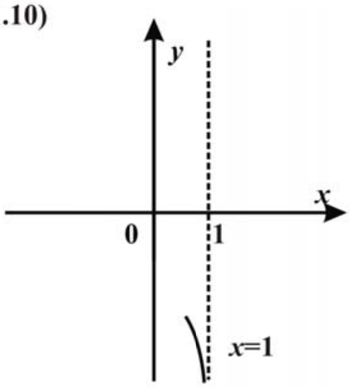
1.7)



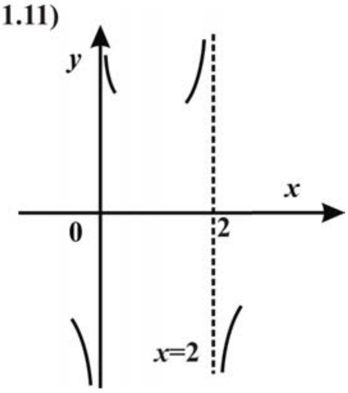
1.9)



1.10)

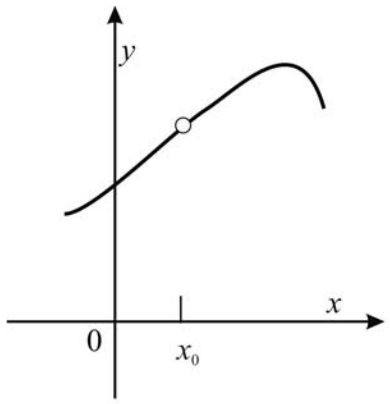


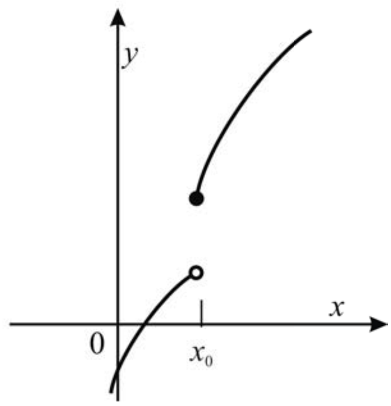
1.11)



CONTINUIDAD

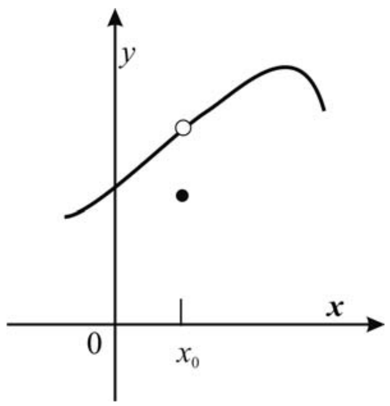
Intuitivamente una función f es continua en un punto x_0 si la gráfica de f no tiene saltos, dicho de otro modo: podemos hacer su gráfica sin levantar el lápiz al pasar por ($x_0, f(x_0)$). En el caso que la función no sea continua en x_0 decimos que es discontinua en el punto. Antes de dar la definición formal de continuidad, veamos estos tres ejemplos de funciones discontinuas en x_0.





El trazo de la gráfica de esta función se ve interrumpido en x_0 porque la función no está definida allí.

La gráfica de esta función se ve interrumpida en x_0 porque el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe.



La figura de al lado muestra la gráfica de una función discontinua en x_0 donde el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, la función está definida en x_0, sin embargo la discontinua se debe a que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no coincide con $f(x_0)$.

Estos tres ejemplos motivan la siguiente definición

Definición.- Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si cumplen las siguientes condiciones:

1.- $f(x_0)$ está definida.

2.- El $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y

3.- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Comentario: Observe que en las gráficas de las funciones dadas arriba al menos una de estas condiciones no se cumple.

Los siguientes ejemplos muestran como concluir si una función es continua o no en un punto usando la definición anterior.

Ejemplo 1.- Determinar si la función f es continua en 0 donde $f(x)=\begin{cases} 1, & si \quad x \le 0 \\ x-1 & si \quad x > 0 \end{cases}$

Solución: Para determinar la continuidad iremos chequeando una por una las tres condiciones de la definición, en cuanto una condición no se cumpla podremos concluir de una vez que la función no es continua en el punto en cuestión.

1.- f está definida en 0: efectivamente $f(0)=1$.

2.- $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. De aquí concluimos que la función es discontinua en 0.

Remarcamos que para ver que una función es continua en un punto hay que chequear que se cumple las tres condiciones.

Ejemplo 2.- Determinar si la siguiente función es continua en 1.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & si \quad x < 1 \\ 2x-1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}.$$

Solución: Chequeamos una por una las tres condiciones de continuidad en un punto,

1.- f está definida en 1:

$f(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$.

2.- Para la segunda condición calculamos límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-1 = 1 \text{ y}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1.$$

Por tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe y vale 1

3.- Finalmente pasamos a la condición 3: vemos que $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$. De aquí concluimos que la función es continua en 1.

Ejemplo 3.- Determinar si la siguiente función $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ es continua o no en 0.

Solución: La función no está definida en 0, 0 no está en el dominio de la función. Por tanto la función no es continua en 0.

Ejercicio de desarrollo.- Determinar si las siguientes funciones son continuas en -1.

a) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3+1}, & si \quad x < -1 \\ -\dfrac{2}{3} & si \quad x = -1 \\ \dfrac{x^3-x}{2(x^3+1)} & si \quad x > -1 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

(**Respuesta:** a) es continua en $x = -1$, b)No es continua en $x = -1$ porque no está definida en este punto)

Anteriormente enunciamos y demostramos que si p es un polinomio entonces: $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$. De este resultado y del hecho que cualquier polinomio está definido en cualquier punto tenemos que:

Proposición 1.- Las funciones polinómicas son continuas en cada x_0.

Para función racionales, r, teníamos que $\lim_{x \to x_0} r(x) = r(x_0)$, en los puntos x_0 donde r está definido. Así pues es elemental ver que el siguiente resultado es cierto.

Proposición 2.- Sea r una función racional definida a través del cociente de polinomios $\frac{p(x)}{q(x)}$. Si x_0 está en el dominio de r entonces r es continua en x_0.

El siguiente Teorema tendrá consecuencias muy importantes

Teorema 1.- *Sean f y g funciones continuas en x_0 y c un número escalar. Entonces las funciones cf, f+g, f-g, fg son continuas en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0.*

La operación de composición entre funciones continuas en un punto x_0, también producen funciones continuas en x_0.

Teorema 2.- *Sean g función continua en x_0 y f función continua en $g(x_0)$. Entonces la función $f \circ g$ es continua en x_0.*

Si asumimos que $f(x) = \sqrt{x}$ en cada punto de su dominio, podemos verificar continuidad puntual de una gran familia de funciones sin recurrir a la definición

Ejemplo 4.- Examinar la continuidad de **a)** $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$; **b)** $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ en cualquier punto x_0 perteneciente al dominio.

Solución:

a) La función f puede ser expresada por la suma de: $f_1(x) = \sqrt{x}$ y la función $f_2(x) = 2x^2$. Hemos asumido que $f_1(x) = \sqrt{x}$ es continua en cada punto de su dominio. La función f_2 también es continua en cualquier punto por ser polinomio. Es claro que el dominio de la función f es el intervalo $[0, \infty)$ y en cada punto de este intervalo tanto la función f_1 como f_2 son continuas, así la función suma es continua.

b) La función *h* puede ser expresada por la composición de: $f(x)=\sqrt{x}$ y la función $g(x)=x^2+1$. Hemos asumido que $f(x)=\sqrt{x}$ es continua en cada punto de su dominio. La función *g* también es continua en cualquier punto por ser polinomio.

Como *f* y *g* son continuas para cada punto de su dominio entonces $h(x)=(f\circ g)(x)$ es continua en cualquier punto x_0 de su dominio.

El Teorema anterior se puede deducir del siguiente:

Teorema 3.- *Sean g tal que* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$ *y f función continua en L. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

A continuación extendemos el concepto de función continua en un intervalo abierto.

Definición.- Diremos que *f* es continua en un intervalo abierto si *f* es continua para cada punto de dicho intervalo.

Comentarios.-

1.- Las funciones polinómicas y racionales son continuas en intervalos abiertos contenidos en su dominio.

2.- Intuitivamente una función es continua en un intervalo abierto si la gráfica de la función en ese intervalo no se ve interrumpida en ningún punto.

3.- Casi todas las funciones que se tratan en los cursos de cálculo son continuas en su dominio salvo quizás en un conjunto finito de puntos.

A través de las gráficas usted puede ver que funciones como $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $h(x)=x^n$ $g(x)=|x|$ son continuas en su dominio.

De comentario 3 y del Teorema 3 se puede verificar propiedades como las que siguen:

1) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{g(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ cuando $\lim\limits_{x\to a} g(x)\geq 0$

2) $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} g(x)\right|$.

Con estas propiedades podemos determinar algunos límites

Ejemplo 5.- Calcular el siguiente límite. Señale, en caso de usarlas, las propiedades de continuidad que está aplicando: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x^2|}{|x^2-x|}$.

Solución: Se tiene una indeterminación 0/0. Se tiene que manipular. Para ello primero aplicamos la propiedad del cociente del valor absoluto, con el fin posterior de sacar el valor absoluto fuera del límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left|1-x^2\right|}{\left|x^2-x\right|}=\lim_{x\to 1}\left|\frac{1-x^2}{x^2-x}\right|$$ Como la función valor absoluto es continua usamos la propiedad de continuidad

$$=\left|\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2-x}\right|$$ Quedo dentro del valor absoluto un límite con forma indeterminada 0/0 del tipo polinomio sobre polinomio: factorizamos y simplificamos

$$=\left|\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{x(x-1)}\right|$$ Sacando (-) de factor común en el primer factor del numerador podemos simplificar

$$=\left|\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)}{x}\right|$$ Desapareció la indeterminación. Se evalúa el límite

$$=\left|-2\right|=2$$

El siguiente Teorema cuya demostración es sencilla, amplia la familia de funciones en que podemos concluir rápidamente que son continuas:

> **Teorema 4.-** Suponga f y g funciones continuas en un intervalo abierto I y c un número escalar. Entonces las funciones $cf, f+g, f-g$ y fg son continuas en *I*. La función $\frac{f}{g}$ es continua en I si g no se anula en ningún punto de *I*.

Por este Teorema podemos concluir que una función como $f(x)=\sqrt{x}(x^2+1)$ es continua en su dominio por ser producto de funciones continuas. Podemos establecer un Teorema similar para funciones compuestas. Por simplicidad se enunciará suponiendo que el Rango(*g*) este contenido en el Dom (*f*), pero hay otras versiones que engloban más casos.

> **Teorema 5.-** Sean f y g funciones continuas en su dominio tales que el Rango(*g*) está contenido en el Dom (*f*), entonces la función $f\circ g$ es continua en cualquier intervalo abierto contenido en el dominio de *g*.

Mediante este Teorema podemos concluir que la función $h(x)=\sqrt{x^2+1}$ es una función continua pues ella es obtenida mediante la composición de las funciones continuas: $h_{ext}(x)=\sqrt{x}$ y $h_{\text{int}}(x)=x^2+1$

Para analizar continuidad debemos siempre considerar el dominio de la función y luego a través de los Teoremas establecer si en el dominio es continua la función.

Ejemplo 7.- Determinar el conjunto de puntos donde la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x^2-2x}$ es continua.

Solución:

El dominio de la función es el conjunto de los reales positivos, excepto el 2. Dom $f=(0,2)\cup(2,\infty)$

Veamos que el numerador es una función continua: $h_1(x)=2x$ es una función continua por ser un polinomio. La función definida por $\sqrt{2x}$ es una función continua por ser una composición de funciones continua: $h_2(x)=\sqrt{x}$ con la función $h_1(x)=2x$. De aquí concluimos que $\sqrt{2x}+1$ es una función continua por ser suma de funciones continuas.

Por otro lado el denominador es continuo por ser un polinomio.

Finalmente la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}+1}{x^2-2x}$ es continua en $(0,2)\cup(2,\infty)$ por ser cociente de funciones continuas en puntos donde el denominador no se anula.

Comentario: Si queremos analizar los puntos donde una función definida por partes es continua es conveniente dividir el dominio en partes: Los puntos donde la función cambia de fórmula, que llamaremos puntos de empate y los intervalos. En los intervalos se usaran los Teoremas y Corolario dados y en los puntos de empate nos valemos de la definición para ver continuidad.

Ejemplo 7.- Determinar el conjunto de puntos donde la siguiente función es continuas

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x} & x<0\\ \sqrt{x}+2 & x\geq 0\end{cases}$$

Solución.:
Para analizar continuidad de esta función definida por partes, dividiremos el dominio en tres partes: El empate: x=0; Parte donde trabaja la primera fórmula: $(-\infty,0)$ y parte donde trabaja la segunda formula sin considerar el empate: $(0,\infty)$

PARTE I ¿Continuidad en $(-\infty,0)$?
La función h es continua en $(-\infty,0)$ por ser una función racional tal que el denominador no se anule en esta parte.
PARTE II ¿Continuidad en $(0,\infty)$?
En $(0,\infty)$ es continua por ser suma de funciones continuas.
PARTE III ¿Continuidad en el empate (x=0)?

Recuerde: En los puntos de empate nos valemos de la definición para ver continuidad.

Condición **1**: $h(0)$ está definida y vale $h(0)=\sqrt{0}+2=2$.

Condición **2**: $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}+2=2$, sin embargo $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-1}{x}=+\infty$. Por tanto $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ no existe y de una vez podemos decir que la función es discontinua e 0.

Concluimos que la función es continua en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Ejemplo 8.- Determinar el conjunto de puntos donde la siguiente función es continuas

$$f(x)=\begin{cases}-x-\dfrac{1}{2} & x\leq 1\\ \dfrac{x^3-1}{1-x^2} & x>1\end{cases}$$

Solución: Como es una función definida por partes analizamos la continuidad en tres partes
Los dos intervalos y el empate
PARTE I: $(-\infty,1)$ (Se concluye por Teoremas) La función está definida en esta parte como $f(x)=-x-\dfrac{1}{2}$, es un polinomio y por tanto continua.

PARTE II: $(1,\infty)$ (Se concluye por Teoremas) La función en esta parte está definida como $f(x)=\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$ es una función racional tal que el denominador no se anula en este intervalo y por tanto continua en esta parte.

PARTE III: El punto $x=1$ Se discute por definición.

1. f está definido en 1 y vale $f(1)=-\dfrac{3}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{1-x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(1-x)(1+x)}=-\frac{3}{2}$$

   De aquí el limite existe y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

3.- $f(1)=-\dfrac{3}{2}=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Por tanto la función es continua en 1.

En definitiva tenemos que la función es continua en **R**

Ejercicio de desarrollo.- Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas

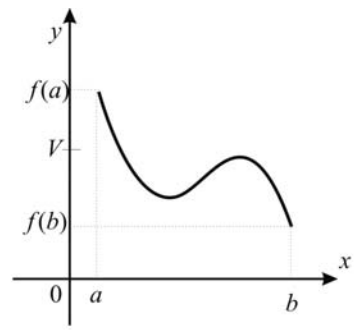
a) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{2x+8}-4}$; **b)** $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{2-x} & x\leq 0\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-2} & x>0\end{cases}$

Ejercicio de desarrollo.- Consiga el valor de k para que la siguiente función sea continua en su dominio.

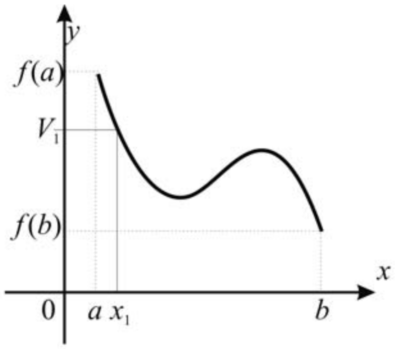
$$h(x)=\begin{cases}kx-1 & si \quad x<-3\\ 2x-k & si \quad x\geq -3\end{cases}$$

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO. MÉTODO DE LA BISECCIÓN PARA ENCONTRAR RAICES DE UNA ECUACIÓN

El Teorema del Valor Intermedio establece un resultado sobre funciones continuas con aplicaciones muy importantes como es la de garantizar sobre ciertas condiciones la existencia de soluciones de ecuaciones y es la base para desarrollar métodos numéricos que aproximan las soluciones de las ecuaciones que tienen al menos una solución



f es una función continua en el intervalo cerrado.
El valor V es un valor que está entre $f(a)$ y $f(b)$.
¿Existe un x_0 entre a y b tal que $f(x_0)$=V?

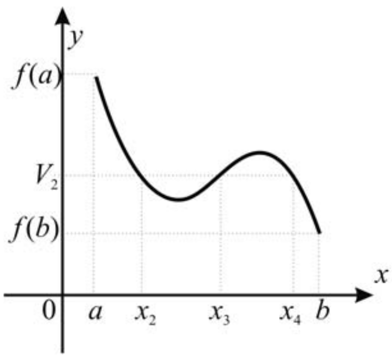


El Teorema del valor intermedio nos garantiza para funciones continuas que para cualquier V_1 entre $f(a)$ y $f(b)$ existe x_1 en el intervalo (a,b) tal que $f(x_1)=V_1$

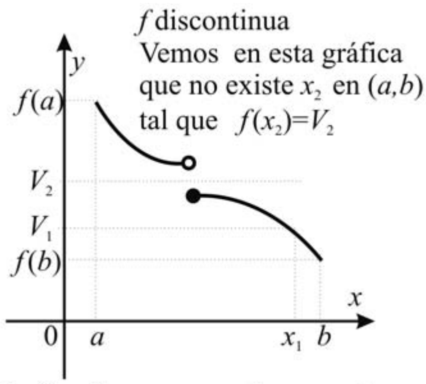
A continuación enunciados este Teorema.

Teorema del Valor Intermedio.- Sea f función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Sea V un valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe al menos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $V = f(x_0)$

Las siguientes figuras muestran algunos comentarios gráficos pertinentes sobre el Teorema del Valor intermedio.

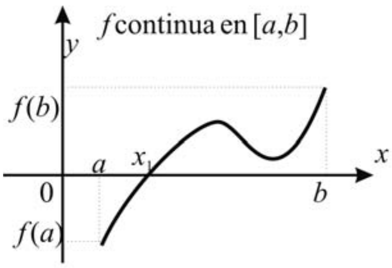


Puede ser que el valor se alcance más de una vez en (a,b).



Si la función no es continua puede ser que se cumpla la conclusión del Teorema o puede ser que no se cumpla.

La siguiente figura muestra como el Teorema del Valor Intermedio puede ser usado para garantizar la existencia de soluciones de determinadas ecuaciones de la forma: $f(x) = 0$ con f continua



En este caso un valor intermedio es 0. Entonces el Teorema del valor intermedio garantiza que existe x_1 en el intervalo (a,b) tal que $f(x_1)=0$.
Podemos ahora pensar que:
x_1 es una solución de la ecuación $f(x)=0$

En el ejemplo gráfico anterior se pudo establecer que $f(x)=0$ tiene solución porque $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios y por tanto 0 es un valor intermedio entre ellos.

El Teorema del Valor intermedio nos puede ayudar a establecer si una ecuación tiene solución e incluso aproximarnos a la solución de la ecuación.

Suponga que tenemos una ecuación de la forma:

"Expresión matemática en la variable *x*" $=0$.

Por ejemplo $e^x - 5x + 1 = 0$. Esta ecuación no puede ser resuelta por métodos analíticos conocidos. Si definimos la función $f(x) = e^x - 5x + 1$, entonces esta ecuación la podemos expresar como $f(x) = 0$

A continuación describimos un algoritmo para resolver ecuaciones con la forma $f(x) = 0$ empleando el método conocido como la bisección y el cual se basa en el Teorema del Valor Intermedio.

Resolución numérica de la ecuación $f(x) = 0$ por el método de la bisección con error a la verdadera solución menor que η , donde *f* es una función continua en una vecindad de una raíz.
1.- Establezca un intervalo cerrado [*a*,*b*] tal que $f(a)$ y $f(b)$ son de signos contrarios (esto se abrevia como $f(a)f(b) < 0$). Si no consigue este intervalo no puede aplicar el método. Si consigue este intervalo cerciórese que la función es continua en este intervalo. Por el TVI existe al menos una raíz en el intervalo [*a*,*b*]
2.- Si la longitud del intervalo [*a*,*b*] es menor que 2η , tome el valor de la mitad como aproximado de la solución de la ecuación
Si no, divida el intervalo [*a*,*b*] en dos parte iguales. Tome el intervalo donde *f* evaluada en los valores extremos del intervalo son de signos contrarios y repita este paso con este nuevo intervalo.

En el siguiente ejemplo mostramos en su desarrollo parte de la justificación del método

Ejemplo 1.- a) Determine que la ecuación $e^x - 5x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real.
b) Usando el método de la bisección obtenga un aproximado de la verdadera raíz.
Solución: a) Primero definimos la función *f* como el lado izquierdo de esta ecuación
$f(x) = e^x - 5x + 1$. El dominio de esta función es R y la función es continua en su dominio.

Ahora hay que buscar dos números tal que al evaluarlos en *f* den de signos contrarios para así usar el Teorema del valor intermedio.

En este caso $f(0) = e^0 - 5\cdot 0 + 1 = 2 > 0$ y $f(1) = e^1 - 5\cdot 1 + 1 < 0$. Por el Teorema del valor intermedio podemos garantizar que al menos hay una raíz de la ecuación $e^x - 5x + 1 = 0$ en el intervalo [0,1].

b) El intervalo [0,1] se parte por la mitad. Se evalúa el valor del medio en *f*. En este caso ½ se evalúa en *f* y se anota el signo. Se toma el intervalo donde los valores de la función evaluados en los extremos del intervalo son de signos contrarios porque hay garantía que en ese intervalo existe al menos una raíz.
$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2} - \frac{5}{2} + 1 = 0.14$. Se toma entonces el intervalo $[\frac{1}{2},1]$. (Recuerde que $f(1) < 0$)

Se **repite** el procedimiento por **segunda vez** ahora con el intervalo $[\frac{1}{2},1]$. El valor de la mitad del intervalo $[\frac{1}{2},1]$ es $\frac{3}{4}$. Hay dos intervalos a considerar ahora $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4},1]$. Uno solo es el que se toma. Se evalúa en $\frac{3}{4}$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=e^{3/4}-\frac{15}{4}+1=-0.63$. Por tanto se toma el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$, pues $f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

(Los valores de la función en los extremos de este intervalo son de signos contrarios)

Realizaremos una iteración más, por cansancio, (**es la tercera iteración**) pero algún lector puede querer continuar hasta conseguir un aproximado a la raíz con un error prefijado. Normalmente este trabajo lo hace la computadora a través de un algoritmo codificado, dando el usuario la aproximación que desea a la verdadera raíz.

Ahora es bueno recordar como se calcula el punto medio entre dos números: a y *b*.

El punto medio entre dos números *a* y *b* está dado por $\frac{a+b}{2}$.

Así, el punto medio del intervalo $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ es entonces $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{5}{8}$.

Evaluamos *f* en este número

$f\left(\frac{5}{8}\right)=e^{5/8}-\frac{25}{8}+1=-0.26$. Por tanto podemos garantizar que la solución de la ecuación está en el intervalo $[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$. Podríamos tomar el valor del medio para dar una estimación de la raíz de esta ecuación. El valor del medio está dado por $x_s\approx\frac{9}{16}\approx 0.5625$.

Comentarios: 1) Empleando otros métodos fuera del alcance de este texto podemos confirmar que los primeros dígitos de la verdadera solución son 0.54488.

2) Observe que la longitud del intervalo $[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]$ es 1/8 y estamos dando el punto medio de este intervalo como un estimado de la solución de la ecuación, en el peor de los casos la verdadera solución podría esta bien pegada a los extremos del intervalo, por tanto en el peor de los caso estamos a 1/16= 0.0625 de distancia de la verdadera raíz. El máximo error posible es 0.0625.

En la *n*-esima iteración la longitud del intervalo donde se encuentra con seguridad al menos una raíz es $1/2^n$.

3) Si en general el intervalo inicial es $[a,b]$, entonces la longitud del intervalo obtenido en el *n*-ésimo paso es $(b-a)/2^n$

EJERCICIOS

1) Determinar si las siguientes funciones son continuas en 1. Justifique

1.1) $h(x)=x-1$; **1.2)** $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$; **1.3)** $f(x)=\frac{x-1}{x^2-x}$;

1.4) $f(t)=\sqrt{t+1}$; **1.5)** $g(w)=\sqrt{2}$; **1.6)** $h(x)=\frac{1}{x^2+x}$;

1.7) $g(x)=\dfrac{1-x}{x}$; **1.8)** $f(x)=\begin{cases}(2x-1)^2, & si \quad x\le 1\\ 1-2x & si \quad x>1\end{cases}$;

1.9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & si \quad x\neq 1\\ 2 & si \quad x=1\end{cases}$; **1.10)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2-x}, & si \quad x<1\\ x-1 & si \quad x\ge 1\end{cases}$;

1.11) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & si \quad x<1\\ \dfrac{1}{x+1} & si \quad x\ge 1\end{cases}$

2) Determinar el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas. Justifique.

2.1) $h(x)=x^2+x-1$; **2.2)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$; **2.3)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$;

2.4) $f(x)=\dfrac{x-1}{4}$; **2.5)** $f(t)=\dfrac{1}{t^3-1}$; **2.6)** $h(w)=\sqrt{2-w}$;

2.7) $f(x)=\begin{cases}4, & si \quad x<-2\\ -2x, & si \quad x\ge -2\end{cases}$; **2.8)** $h(x)=\begin{cases}2, & si \quad x\le 3\\ -x+1, & si \quad x\ge 3\end{cases}$;

2.9) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2-x}, & si \quad x\neq 2\\ -4, & si \quad x=2\end{cases}$; **2.10)** $h(x)=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\le 1\\ 1-2x & si \quad 1<x<2\\ -3 & si \quad x\ge 2\end{cases}$;

2.11) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-27}{x-3}, & si \quad x\neq 3\\ 18, & si \quad x=3\end{cases}$ **2.12)** $h(x)=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x<1\\ 0 & si \quad x=1\\ \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & si \quad x>1\end{cases}$

3) Calcule los siguientes límites. Precise en que parte usa la propiedad de continuidad.

3.1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-x^2}}{\sqrt[3]{x}-1}$; **3.2)** $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{|1-2x|}{|4x^2-1|}$

4) VERDADERO O FALSO. Justifique

4.1) ( ) Si al menos una de las dos funciones f o g es discontinua en x_0 entonces $f-g$ es discontinua en x_0.

4.2) ( ) Si $f+g$ es una función continua entonces f es continua.

4.3) ( ) Si f es continua entonces $|f|$ es continua.

4.4) ( ) Si f es una función racional entonces solo puede haber un número finitos de puntos de discontinuidades.

4.5) ( ) La función $g(x)=\begin{cases}0, & si \quad x \quad es \quad racional\\ 1, & si \quad x \quad es \quad irracional\end{cases}$, no tiene ningún punto de continuidad.

4.6) Si el límite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe entonces el límite vale $\dfrac{f(1)}{g(1)}$.

4.7) Si $f(x) > 0$ para toda x y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) > 0$.

4.8) Si f es una función racional definida como $f(x) = \dfrac{p(x)}{x-1}$ donde p es un polinomio entonces x=1 es una Asíntota vertical.

4.9) El resultado de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$ es 0/0.

4.10) Suponga se tiene un límite de la forma $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tal que al evaluar f y g en c ambas dan 0, entonces decimos que el límite tiene forma indeterminada 0/0.

4.11) Si g es continua entonces $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)$

5) Para cada función dada abajo consiga el valor de k para que la función sea continua en su dominio.

5.1) $h(x) = \begin{cases} kx^2 - 1 & si \quad x < 1 \\ 3x - k & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

5.2) $h(x) = \begin{cases} k^2 - x & si \quad x < 1 \\ 8 & si \quad x = 1 \\ 2x - 2k & si \quad x > 1 \end{cases}$

5.3) $h(x) = \begin{cases} xk^2 & si \quad x \leq -2 \\ -6k - 2x & si \quad x > -2 \end{cases}$;

5.4) $f(x) = \begin{cases} k^2 x & si \quad x \leq 1 \\ 6k - 8x & si \quad x > 1 \end{cases}$

6) Demuestre que si f y g son funciones continuas en x_0 entonces la función fg es continua en x_0.

7) Use el método de la bisección para encontrar una solución aproximada a la ecuación $9x^3 - x - 1$

APLICACIONES

1) La sensación térmica por efecto del viento está modelada por la siguiente función de v velocidad del viento en Km/h.

$$W(v) = \begin{cases} T & si \quad v < 6.4009 \\ 33 - (33 - T)\cdot(0.47547534 + 0.2392\sqrt{v} - 0.0126v) & si \quad 6.4009 \leq v \leq 90.0601 \\ 1.61072608T - 20.15396064 & si \quad v > 90.0601 \end{cases}$$

Donde T es la temperatura en ºC.
v es la velocidad del viento en Km/h. ¿Es la función continua en 6.4009 y en 90.0601? ¿Por qué el modelo para representar la sensación térmica es continuo?

2) A fin de propiciar el ahorro de electricidad se estableció la siguiente tarifa

$$t(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 100 \\ 2000 + 3.5(x - 100) & si \quad 100 \leq x \leq 400 \\ 4x & si \quad x > 400 \end{cases}$$

donde x es el número de kilowatios-horas consumidos al mes. ¿Es t continua en 100? ¿Es continua en 400? ¿Qué importancia tiene que la función de tarifa sea continua?

Respuestas: 1.1) Continua **1.2)** Discontinua; **1.3)** Discontinua en 1 **1.4**) Continua; **1.5)** Continua **1.6)** Continua; **1.7)** continua en 1; **1.8**) Discontinua; **1.9)** Continua en 1. **1.10)** Continua; **1.11**) Discontinua en 1
2.1) Continua en **R; 2.2)** Continua en **R**-{-1,3}; **2.3.-** Continua en **R; 2.4)** Continua en **R**
2.5) Continua en **R**-{1} **2.6)** Continua en su dominio $(-\infty,2]$; **2.7**) Continua en **R;**
2.8) Continua en **R**-{3}; **2.9)** Continua en **R**. **2.10**) Continua en **R**-{1}
2.11) Continua en **R; 2.12)** Continua en **R**-{1} (l limite por la derecha es 1/2 y por la izquierda 0).
3.1) 1; **3.2)** 1/2.

4.1) Falso. Defina $f(x)=\begin{cases} 0, & si \ \ x \leq 1 \\ 1, & si \ \ x > 1 \end{cases}$, claramente *f* es discontinua en 1. Defina $g(x)=f(x)$

Entonces $(f-g)(x)\equiv 0$ la cual es continua en 1.

4.2) (Falsa), defina *f* como en 4.1 y $g(x)=-f(x)$ Tenemos que *f+g* es la función constante 0, pero *f no* es una función continua en 1.
4.3) (Verdadera), si la gráfica de *f* es un trazo continua, al simetrizar la parte negativa de las *y* se sigue obteniendo un trazo continuo.

4.4) (Verdadero), una función racional es la que se puede llevar a la forma $\dfrac{polinomio \ 1}{polinomio \ 2}$ y los puntos de discontinuidad son solo los puntos donde el denominador se hace 0, por ser un polinomio no puede tener más de n raíces, con n el grado de este polinomio.
4.5) (Verdadero). Entre dos racionales hay un irracional así que no existe continuidad en los racionales porque el límite no existe. Igualmente entre dos irracionales hay un racional, por tanto no puede haber continuidad en los racionales

4.6) (Falso), por ejemplo el límite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}$ vale 1, en este caso $g(x)=f(x)=x-1$ sin embargo la expresión $\dfrac{f(1)}{g(1)}$ no está definida: 0/0.

4.7) (Falso), defina $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & si \ \ x \neq 1 \\ 1 & si \ \ x=1 \end{cases}$ tenemos que $f(x)>0$ para toda *x* en el dominio de *f* y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

4.8) (Falso), No necesariamente, por ejemplo $p(x)=x-1$, entonces *x*=1 no es asíntota vertical
4.9) (Falso), 0/0 no es un resultado, el límite en este caso no se determina por evaluación directa porque da una indeterminación, hay que manipular algebraicamente, en este caso se factoriza y se simplifica. Se calcula el límite como sigue

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0$$

4.10) (F) Para tener esta forma indeterminada *f* y *g* deben tender a 0 cuando *x* tiende a *c*. Por ejemplo $f(x)=\begin{cases} x & si \ \ x\neq 1 \\ 0 & si \ \ x=1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 2x & si \ \ x\neq 1 \\ 0 & si \ \ x=1 \end{cases}$ al evaluarlas en 1 ambas dan 0. Sin embargo en la definición del límite $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ el valor *x*=1 no se considera. Así $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{2x}$ y este límite no tiene forma indeterminada.
4.11) (F) Si *f* es continua, no importa g, entonces la proposición es verdadera.
5.1) $k=2$**; 5.2)** $k=-3$**; 5.3)** *k*=1,2; **5.4)** 2,4; **7)** 0.55724